

Részletes jelentés

A kutatás témája véges ill. végtelen dimenziós, részben rendezett Banach terekben ható nemnegatív lineáris operátorok ill. nemnegatív lineáris rendszerek aktuális kérdéseinek vizsgálata volt. A kutatási tervben kitűzött fontosabb lehetséges kutatási részirányok száma előre jósolhatóan nagyobb volt annál, hogy mindben lényeges eredmények lettek volna elérhetők. Ezért néhány kiválasztott fontosabb irányra koncentráltunk, azokban igyekeztünk mélyebb eredményeket igazolni, és azokat világszínvonalú folyóiratokban ill. könyvrészekben közölni.

A kutatás előrehaladása körülbelül a tervezett ütemben, nagyjából egyenletesen történt, amennyiben a minősítés matematikai kutatásban egyáltalán alkalmazható. A négy évre tervezett kutatás időtartamát engedéllyel öt évre hosszabbítottuk, hogy a közlemények megjelenése teljesebb képet nyújtson, és bizonyos kérdésekre adható válaszokat megkaphassuk. A kutatómunkában résztvevők személyében nem történt változás (csak az adminisztrátor személyében, időlegesen), így ilyen természetű probléma a kutatás folyamatát nem akadályozta.

A költségtervben a tervezettől eltérő legjelentősebb eltérés az egyéves hosszabbítással kapcsolatos természetes átcsoportosítás volt, amely a költségek semmilyen emelkedéséhez nem vezetett: teljes mértékben az eredeti négyéves költségterv összegén belül maradtunk. A személyi juttatásoknak a tervezetthez képest kis mértékű túllépése az adminisztrátor személyében bekövetkezett (nem tervezett) változás következménye volt: csak adminisztrátorok ill. hivatalsegédék részesültek személyi juttatásban. A külföldi utazás dologi kiadásai ill. napidíj rovatokon sikerült a tervezetthez képest megtakarítást elérnünk (két egyetem közötti kapcsolatot ill. DAAD támogatást felhasználva), amit készletbeszerzésre ill. egy notebook beszerzésére fordítottunk. Ez utóbbi beszerzés fontosságát mind az otthoni munka, mind a konferenciákon, előadásokon részvétel szempontjából talán felesleges hangsúlyoznunk.

Az elért eredmények részletes bemutatása előtt hangsúlyozzuk, hogy ezek már (csaknem) mind közlésre kerültek nemzetközileg igen jónevű folyóiratokban, így a nyilvánosság számára részleteiben is hozzáférhetők. A közlemények mind tartalmazzák a támogatás elismeréseként a jelen OTKA pályázat számát.

Nagy Béla folytatta Karl-Heinz Försterrel közös kutatásait nemnegatív mátrix- ill. operátorpolinomok vizsgálatában, amely témában 3 dolgozatot közöltek a jelen OTKA pályázat támogatásával az Operator Theory: Advances and Applications sorozat 162, 163 és 175 köteteiben, 2005 ill. 2007 években, valamint további két folyóirat cikket publikáltak közösen.

On nonmonic quadratic matrix polynomials with nonnegative coefficients c. cikkünkben a $Q(z)=zI-S(z)$ alakú mátrixpolinomot vizsgáltuk, ahol S nem identitás főegyütthatójú mátrixpolinom elemenként nemnegatív négyzetes mátrix együtthatókkal. Leírtuk Q sajátértékeinek eloszlását a $z\text{-rad}[S(z)]$ függvény előjelének függvényében, ahol z nemnegatív szám, és rad jelöli a spektrálsugarat. Vizsgáltuk Q nemnegatív (spektrális) mátrixgyökének létezését attól függően, létezik-e olyan pozitív z szám, amelyre $z>\text{rad}[S(z)]$. Feltételezve, hogy az $S(t)$ mátrix irreducibilis valamely pozitív t értékre, leírtuk Q spektrumát olyan r sugarú körökön, amelyekre $r=\text{rad}[S(r)]>0$. Leírtuk a különböző lehetőségeket Q nemnegatív mátrix gyökének létezésére és a kapcsolatos M -mátrix tulajdonságaira vonatkozólag, és leírtuk a Q spektrális tulajdonságait a $\text{rad}[S(\cdot)]$ függvény és deriváltjai segítségével.

Spectral properties of operator polynomials with nonnegative coefficients c. cikkünkben a $Q(z)=z^mI-S(z)$ operátorpolinomot vizsgáltuk, ahol $S(z)=z^dA_d+\dots+zA_1+A_0$ és 1 kisebb-egyenlő m kisebb d . Az A együtthatók mind egy részben rendezett Banach algebra pozitív kúpjában vannak vagy pedig pozitív lineáris operátorok egy E komplex Banach hálón, és I az identikus operátor. Vizsgáltuk $S(z)$ spektrálsugarának tulajdonságait, ha z nemnegatív valós szám, és e spektrálsugar kapcsolatát a fenti értelemben nemnegatív együtthatójú spektrális osztó (operátorpolinomok) létezésével. Bizonyítottunk faktorizációs eredményeket úgynevezett rendezett felbontható Banach algebra nemnegatív elemeire (feltételezve, hogy az algebra kúpja zárt és normális), valamint hasonló típusú eredményeket az ún. Wiener algebrában. Alkalmaztuk korábbi eredményeinket ún. mónikus (azaz identitás főegyütthatójú) nemnegatív operátorpolinomokról a fent leírt (általánosabb, és új módszereket kívánó) operátorpolinom osztályok vizsgálatában.

On reducible nonmonic matrix polynomials with general and nonnegative coefficients c. cikkünkben általános (nem szükségképpen mónikus) kvadratikus operátorpolinomokat vizsgáltunk általános vagy véges dimenziós lineáris térben, általános vagy nemnegatív együttható operátorokkal. Itt alkalmaztuk vagy néhány esetben kiterjesztettük a fenti dolgozatok eredményeit. Elegendő, néhány esetben pedig szükséges és elegendő feltételeket kaptunk jobb oldali (lineáris) gyökpolinom létezésére, ha az együttható operátoroknak van alsó blokk háromszög alakú reprezentációjuk. A véges dimenziós esetben vizsgáltuk a (bizonyos értelemben elemenként) nemnegatív (reducibilis) együttható mátrixok esetét, és kiterjesztettük néhány korábbi eredményünket a speciális (irreducibilis együtthatók) esetről. Általánosítottuk Gail, Hantler és B.A.Taylor bizonyos eredményeit, amelyeket e szerzők Markov láncok spektrális analízisében alkalmaztak. Megmutattuk, hogy általános módszereink elegendően erősek ahhoz, hogy bizonyítsuk Butler, C.R.Johnson és Wolkowicz egy nevezetes eredményét, amelyet ők ötletes ad hoc módszerekkel igazoltak.

Irreducible Toeplitz and Hankel matrices c. cikkünkben végtelen Toeplitz ill. Hankel típusú mátrixok irreducibilitását vizsgáltuk. Az alapvető definíció König Dénestől származik, és standard pl. a Markov láncok elméletében is: egy végtelen mátrixot irreducibilisnek nevezünk, ha a társított irányított gráf erősen összefüggő. Megmutattuk, hogy egy végtelen Toeplitz típusú mátrix irreducibilis pontosan akkor, ha „majdnem” minden véges „vezető részmátrixa” (bal felső sarokmátrixa) irreducibilis (természetesen a „majdnem” szó pontos definíciójával). Érdekes módon, a vezető részmátrixok irreducibilitásának eldöntése sem triviális feladat, a dolgozatban megkaptuk az itt felmerülő kérdések megoldásait. Jellemeztük véges Hankel típusú mátrixok irreducibilitásának esetét. Megmutattuk, hogy végtelen Hankel típusú mátrix lehet irreducibilis akkor is, ha minden véges bal felső sarokmátrixa reducibilis. A bizonyítások technikájában elemi számelméleti megfontolások játszottak érdekes módon szerepet.

Rational generating functions and matrix-geometric invariant measures c. cikkünkben az ún. $M/G/1$ és $G/M/1$ típusú Markov láncok esetén vizsgáltuk a kapcsolatot az M.F.Neuts által bevezetett mátrix-geometriai invariáns mértékek és racionális (mátrix értékű) generátorfüggvények között. Jellemeztük az ilyen típusú invariáns mértékek létezésének feltételeit. Latouche, Pearce és P.G.Taylor egy kérdését megválaszolva megmutattuk, hogy tranziens quasi-birth-and-death (QBD) folyamat esetén nem minden pozitív invariáns mérték mátrix-geometriai (Neuts definíciója értelmében). A lineáris rendszerelmélet eszközeivel bevezettük és vizsgáltuk a mátrix-geometritás (ezen keretben természetesen kínálkozó) általánosított fogalmait. Az eredmények alapvető jellege a következőnek bizonyult: az invariáns mértékek (mint fent láttuk) nem mindig mátrix-geometriaiak, de nagyon gyakran tartoznak az egyik újonnan definiált osztályba.

K.-H.Förster, Nagy B. és Szilvási M. közös dolgozata A uniform type inverse spectrum theorem for entrywise nonnegative matrices. A dolgozat fő eredménye nemnegatív mátrixok inverz spektrum problémájában a következő tétel: Az $n-1$ pozitív egész szám olyan tulajdonságú, hogy bármely $n-1$ komplex számból álló olyan önkonjugált (self-conjugate) lista elemeivel, amelynek minden eleme a zárt egységkörlemezben van, valamely n -edrendű nemnegatív mátrix teljes spektrális listáját adja (azaz a sajátértékek teljes listáját multiplicitásokkal), de semmilyen kisebb valós szám $v < n-1$ nem ilyen tulajdonságú. A bizonyított tétel nagyon esztétikus, és az inverz spektrum problémában valamint lineáris rendszerek pozitív realizálásában nyilvánvaló alkalmazásai várhatók. A kérdés első felvetése Guo Wuven nevéhez fűződik, aki bizonyította, hogy a $2n$ szám a fenti tulajdonságú, majd Rojo és Soto bizonyította, hogy az $n-1 + (\text{négyzetgyök } 2)$ szám ilyen tulajdonságú. Ugyanők bizonyították, hogy ha az $n-1$ elemű lista kizárólag valós elemű lehet, akkor az $n-1$ szám a fenti tulajdonságú.

Matolcsi Máté az On quasi-contrativity of C_0 -semigroups in Banach spaces című cikkben megmutatta, hogy ha egy Banach téren értelmezett erősen folytonos operátor-félcsoport generátora nem korlátos, akkor a téren bevezethető olyan ekvivalens norma, amelyre nézve a félcsoport nem kvázi-kontraktív.

A kutatási projekt további fontos eredményei lineáris időinvariáns véges dimenziós rendszerek pozitív realizálásának kérdéseivel kapcsolatosak.

Estimates for the dimensions of nonnegative realizations c. cikkünkben Matolcsi M. és Nagy B. a transzfer függvényre és az ún. impulzusválasz sorozatra vonatkozó természetes feltételek mellett adott felső („worst case”) becslést skalár típusú (SISO) rendszer nemnegatív realizálása esetén az állapotter lineáris dimenziójára, amely becslés gyakorlatilag használható, de általánossága és a technikai jellegű feltételek miatt nehezen idézhető. Megmutatták azt is, hogy a multi-input multi-output (MIMO) esetben a mátrix értékű transzfer függvény elemeire vonatkozó nemnegatív realizálási információ hogyan használható fel a MIMO eset nemnegatív realizálása dimenziójának felső becslésére. Jóllehet a becslési technika távolról sem egyszerű, és a kapott dimenziókorlát fontos információ, a módszer még nem adott lehetőséget egy nemnegatív realizálás gyakorlatilag használható felírására ill. konstruálására.

Minimal positive realizations of transfer functions with nonnegative multiple poles c. cikkünkben Matolcsi M. és Nagy B. azt az esetet vizsgálták, amikor a transzfer függvénynek kizárólag nemnegatív, de esetleg többszörös pólusai vannak. Ebben az esetben sikerült minimalitási eredményeket bizonyítani.

Order bound for the realization of a combination of positive filters c. cikkünkben Nagy B., Matolcsi M. és Szilvási M. a pozitív realizálások másik fontos alkalmazását vizsgálták. Digitális szűrők realizálását tanulmányozva Gersho és Gopinath után Benvenuti, Farina és B.D.O.Anderson kapták a figyelemre méltó és műszaki körökben híressé vált eredményt, hogy minden lineáris, aszimptotikusan stabilis, diszkrét, időinvariáns SISO rendszer $t(z)$ transzfer függvénye előáll két pozitív, aszimptotikusan stabilis lineáris rendszer transzfer függvényei különbségeként. Mivel pozitív rendszerek realizálása (pl. digitális szűrők révén) mérnökiileg jól kezelhető és megvalósítható, a fenti eredmény a transzfer függvényre vonatkozó erős feltételek mellett (egyszerű pólusok) is nagy figyelmet keltett. Mi ténylegesen számítható algoritmust adtunk az általános probléma kezelésére, speciálisan a nagyobb multiplicitású pólusokat tartalmazó transzfer függvények esetére, amely addig nyitott kérdés maradt. A felbontásban szereplő pozitív, aszimptotikusan stabilis rendszerek egyike mindig 1 dimenziós állapotterű, a másik állapotterének dimenziója pedig függ az eredeti transzfer függvény rendjétől és nemvalós pólusok esetén $t(z)$ pólusainak helyzetétől is. A kapott

dimenziószámok néhány fontos esetben minimálisak, és mindig a realizálás kivitelezése előtt (azaz a priori) számíthatók.

Positive decomposition of transfer functions with multiple poles c. dolgozatunkban Nagy B., Matolcsi M. és Szilvási M. megmutatta, hogy a fentebbi dolgozatban kapott általános felbontási eredményben szereplő második állapotér-dimenziószám konkrét, a gyakorlatban előforduló speciális esetekben esetleg javítható. A vizsgált transzfer-függvényosztály esetében lényegesen új ötletek alkalmazásával sikerült a fentebbi dolgozatban kapott általános eredmény dimenziószámát csökkenteni, ami egyrészt mutatja, hogy a fenti felbontásban szereplő második pozitív rendszer nem szükségképpen pozitív-minimális, másrészt remélhető, hogy az alkalmazott új ötletek más konkrét esetekben is lehetővé teszik a dimenziószám csökkentését, ami az alkalmazásokban mindig kívánatos eredmény.

An algorithm for the construction of nonnegative realizations c. cikkünkben Nagy B. és Szilvási M. algoritmust adott valós együtthatós skalár (SISO) transzfer függvény egy nemnegatív realizálásának kiszámítására a következő feltételek mellett: a t transzfer függvénynek egyetlen domináns pozitív pólusa p (tetszőleges rendszámmal), továbbá lehetnek (valós és komplex) pólusok a spektrális körlemez belsejében tetszőleges rendszámmal (természetesen feltételezve, hogy z és konjugáltjának rendszáma azonos). [Elméletileg érdekes, hogy nem feltételeztük az ún. impulzusválasz függvény nemnegativitását, ami standard feltétel hasonló típusú problémákban.] Feltételeztük, hogy a t parciális tört felbontásában a p -hez tartozó tagok együtthatói nemnegatívak. Megmutattuk, hogy ha t reziduuma p -ben elegendően nagy pozitív szám, akkor az impulzusválasz függvény nemnegatív, és a közölt (távrolról sem egyszerű) algoritmus adja t egy nemnegatív realizálását. Továbbá, a pólusoknak a spektrális körlemez belsejében elfoglalt helyétől függően a priori becslés adható a nemnegatív realizálás dimenziójára.

Megemlítem még, hogy megkezdjük nemnegatív rendszerek perturbációjaként kapott rendszerek vizsgálatát, de ezen eredmények még nem érték el a közlés érettségi fokát.

Végül röviden felsoroljuk azon eredményeinket, amelyek eredetileg nem szerepeltek a kitűzött kutatási irányok között, de amely publikációkon az OTKA projekt támogatása feltüntetésre került. Ezen publikációk a Közlemények között is megtalálhatók, és természetesen ezeket az eredményeket más OTKA projektek zárójelentésében nem szerepeltetjük.

Fuglede's conjecture fails in dimension 4 című cikkében Matolcsi Máté T. Tao 5 dimenziós ellenpéldáját megjavítva 4 dimenziós ellenpéldát adott Fuglede sejtésére, azaz olyan halmazt konstruált amely spektrális, de nem parkettáz.

Linear polarization constant of R^n című cikkében Matolcsi Máté új becslést adott valós euklideszi téren vett funkcionálok szorzatának normájára, a fellépő Gram matrix sajátértékeinek harmonikus közepével.

Thomas rotation and Thomas precession című cikkben Matolcsi Tamás és Matolcsi Máté pontos matematikai leírást adtak egy a speciális relativitás elméletben ismert meghökkentő jelenségre, a Thomas rotációra.

C^1 -continuous Coons-type blending of triangular patches és Generalization of Coons' construction című cikkekben Nagyné Szilvási Márta és Szabó Ildikó doktorandusz hallgató új felületmodellezési eljárásokat dolgoztak ki szabadformájú felületeknek spline-függvényekkel való előállításánál fellépő lyukak folytonos kitöltésére.

A Removing errors from triangle meshes by slicing, A curvature based approach to milling path generation on triangular surfaces és a Face-based estimations of curvatures on triangle meshes című cikkekben Nagyné Szilvási Márta diszkrét differenciálgeometriai eszközökkel görbületet definiált háromszöghálózattal közelített felületekre, és az alkalmazásokban fellépő speciális felületi görbék (szerszámpályák) kiszámítására adott meg eljárásokat.